Práctica 9

Notaciones y definiciones

- $\star$ $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ / f es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en $\mathbb{R}\}$
- $\star$ $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\, dt \quad f \in G(\mathbb{R})$
- $\star$ $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, dt \quad f, g \in G(\mathbb{R})$

Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de L^1

   a) $e^{-|x|}$ **b)** $\dfrac{1}{1+x^2}$ **c)** e^{-ax^2}

   d) $\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \ (a > 0)$ **e)** $\begin{cases} 0 & |x| > A \\ 1 & |x| < A \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & x \notin [0, a) \end{cases}$

2. Sean $f, g \in G(\mathbb{R})$. Probar las siguientes propiedades de la convolución:

   a) $f * g = g * f$

   b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)\, dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt\right)$

3. Sea $f \in G(\mathbb{R})$. Probar:

   a) $g(x) = e^{iax}f(x) \ \Rightarrow \ g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-a)$

   b) $g(x) = f(x+a) \ \Rightarrow \ g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = e^{iat}\hat{f}(t)$

   c) $g \in G(\mathbb{R}) \ \Rightarrow \ \widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$

   d) $g(x) = \overline{f(-x)} \ \Rightarrow \ \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

   e) $g(x) = f(\frac{x}{a}), \quad a > 0 \ \Rightarrow \ \hat{g}(t) = a\,\hat{f}(at)$

   f) $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1 \ \Rightarrow \ \hat{f}$ es derivable y $\hat{f}' = \hat{g}$

   g) $f^{(n)} \in C^n \ \Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n\hat{f}(t)$

h) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \;\Rightarrow\;$ Re$(\hat{f})$ es par e Im$(\hat{f})$ es impar.

i) $g(x) = f(ax+b), \quad a \neq 0 \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}(\frac{t}{a})$

j) $g(x) = f(x)\cos(ax) \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \dfrac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$

k) $g(x) = f(x)\,\mathrm{sen}(ax) \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \dfrac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$

l) f continua y $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \;\Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

a) Comprobar que $\hat{f}(t) = 2\,\dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t}$.

b) Verificar que:

i) $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c,d] \\ 0 & x \notin [c,d] \end{cases} = f\left(\dfrac{2}{d-c}x + \dfrac{d+c}{d-c}\right)$

ii) $k(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}\, x & x \in [0,\pi] \\ 0 & x \notin [0,\pi] \end{cases} = \mathrm{sen}\, x\, f\left(\dfrac{2}{\pi}x - 1\right)$

c) Calcular $\hat{h}$ y $\hat{k}$ usando el ejercicio 3.

5. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^1.

a) $e^{-a(x-b)^2}$ $(a > 0, b \in \mathbb{R})$ **b)** $e^{-x^2}\,\mathrm{sen}(ax)$ **c)** $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

6. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^2.

a) $\dfrac{x}{x^2+1}$ **b)** $\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{x}$ **c)** $\dfrac{x^3}{1+x^4}$

d) $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}$ **e)** $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ **f)** $\dfrac{\mathrm{sen}(ax)}{x}$ $(a > 0)$

- Sean $f, g \in L^2$, continuas a trozos. Se tienen las siguientes propiedades:

a) $f \pm g,\ f \pm ig \in L^2$.

b) **i)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2\, dt$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2\, dt$

c) Identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

7. Usando la identidad de Parseval, calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1-e^{-ita}}{it}\right|^2 dt,\ (a>0)$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bt)}{t^2}\, dt$

8. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(au)}{u}$ **b)** $\dfrac{1-\cos(au)}{u}$ **c)** e^{-u^2} **d)** $\dfrac{u}{u^2+1}$

9. **a)** Hallar la transformada inversa de Fourier de: $g(u) = \dfrac{1}{(u^2+1)^2}$ interpretándola como la transformada de una convolución.

   b) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} g(y)\, dy$, en función de $\hat{g}$.

- **Regla de Leibniz**

  Sea $\varphi : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{C}$ continua y $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ dada por $g(t) = \displaystyle\int_a^b \varphi(s,t)ds$. Entonces:

  a) g es continua.

  b) Si $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$ entonces g es C^1 y $g'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)ds$

10. Resolver transformando Fourier en la variable x

    a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

    b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

    c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = u \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = 6\,e^{-3x}\,h(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

    d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. Resolver utilizando la transformada de Fourier

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

12. Utilizar la transformada de Fourier para encontrar una solución explícita de la siguiente ecuación diferencial para la función $u = u(x,y)$,

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : y>0\} \\ u(x,0) &= f(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

(problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un semiplano) donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es dada. Obtener una fórmula integral de la forma

$$u(x,y) = (P_y * f)(x)$$

donde P_y es un núcleo (conocido como el núcleo de Poisson).

13. a) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial, para la función $u = u(x,t)$,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) : t > 0\} \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es dada (problema de Cauchy para la ecuación del calor). Obtener una fórmula integral cómo en el ejercicio anterior, ¿qué núcleo interviene?

b) Encontrar la solución explícita cuando

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

c) ¿Qué sucede si cambiamos la ecuación por $u_t = iu_{xx}$? (ecuación de Schrödinger)

14. (a) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial, para la función $u = u(x,t)$,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{en } \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= v_0(x) && \text{en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ecuación de las ondas) para u_0 y v_0 suficientemente regulares.

(b) Probar que la energía

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2)\, dx$$

es constante en el tiempo.